ОЛІМПІАДА – 2022

Шановні студенти! Для всіх, хто має бажання і можливість, з **18.03.2022** по **03.04.2022** на факультеті у дистанційному форматі проходить Олімпіада з математики. Участь в Олімпіаді можуть взяти студенти нашого факультету будь якого курсу будь якої спеціальності. Кожна задача оцінюється в 5 балів. Відповіді надсилати в електронному вигляді (pdf файл або скани/фото розв'язань) на корпоративну адресу деканату fmif@npu.edu.ua.

Задача 1. Знайти всі натуральні числа, які в системі числення з основою 2022 є двоцифровими і рівні сумі квадратів своїх цифр. Відповідь подати у десятковій системі числення.

Задача 2. Матриця $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ має властивості:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = c^2 = b_1^2 + b_2^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \end{cases}$$

де $0 \neq c$ – фіксоване дійсне число. Яких значень може набувати її визначник?

Задача 3. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка K ділить напрямлений відрізок $\overline{BB_1}$ у відношенні $\lambda > 0$, а точка M – напрямлений відрізок $\overline{CC_1}$ у відношенні $\nu > 0$. При яких λ і ν площина AKM ділить призму на дві рівновеликі частини?

Задача 4. Доведіть, що точки z_1 і z_2 комплексної площини, відмінні від точки $z = 0$, лежать на прямій, яка проходить через початок координат, тоді і лише тоді, коли виконується рівність $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Задача 5. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2021 \cdot 2022}\right) \cdot 2022!$ Відповідь обґрунтуйте.

Задача 6. Множина $A \subseteq N$ задовольняє наступним умовам: 1) $1 \in A$; 2) якщо $x \in A$ і $y \in A$, то $(2x + 3y) \in A$. Доведіть, що $2021 \in A$ і $20212021 \in A$.

Задача 7. Послідовність (x_n) задана рекурентно: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$ $(n \geq 1)$. Знайдіть:

1) x_{2021}; 2) $\lim_{n \to \infty} x_n$, якщо вона існує.

Задача 8. Додатні дійсні числа x та y задовольняють нерівність $xy > 2021x + 2022y$. Доведіть, що для таких чисел виконується нерівність $x + y > (\sqrt{2021} + \sqrt{2022})^2$.

Задача 9 Дано трапецію *ABCD* (*AB* ∥ *CD*). Точки *K* і *L* належать сторонам *AB* і *CD* відповідно. Позначимо точку перетину відрізків *AL* і *DK* через *E*, точку перетину відрізків *BL* і *CK* через *F*. Доведіть, що сума площ трикутників *ADE* і *BCF* дорівнює площі чотирикутника *EKFL*.

Задача 10. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{4\sin^4 x - 2\cos 2x + 3} + \sqrt{4\cos^4 x + 2\cos 2x + 3} = x^3 + 2x^2 - 2x - 1.$$

Задача 11. Знайти всі значення параметра a, при яких відстань від центра кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 - 2(a-4)x - 2(a+3)y - 16 = 0$, до дотичної до параболи $y = x^2 + 4x - 5$, яка перпендикулярна до прямої $x + 2y - 6 = 0$, менша за $\sqrt{5}$.

Задача 12. У рівнобедрений трикутник зі сторонами 1, 1 та x вписано прямокутник найбільшої площі так, що дві його вершини лежать на бічних сторонах трикутника, а дві – на основі. Знайдіть:

1) множину можливих значень x; 2) площу прямокутника; 3) значення x, при якому площа прямокутника буде найбільшою.